Lezione 11

Numeri complessi

Donato A. Ciampa

Introdurremo in questa lezione l'insieme numerico $\mathbb{C}$ dei numeri complessi e ne studieremo le sue principali proprietà. Inoltre evidenzieremo come l'introduzione di tale insieme numerico permetta di trattare in maniera nuova e con risvolti molto interessanti alcuni concetti che già abbiamo visto nelle precedenti lezioni.

1. L'unità immaginaria i

Nella prima lezione di questi precorsi, abbiamo introdotto i vari insiemi numerici in modo induttivo: partendo infatti dall'insieme $\mathbb{N}$, abbiamo via via costruito i vari insiemi a seguire perché vi era la necessità di eseguire operazioni che negli insiemi precedenti non erano effettuabili. Possiamo riassumere tale costruzione con uno schema:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{\text{sottrazione}} \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{divisione}} \mathbb{Q} \xrightarrow{\text{radice}} \mathbb{R}.$$

Abbiamo però visto, risolvendo ad esempio una semplice equazione di secondo grado quale $x^2 + 1 = 0$, che per quanto l'insieme dei numeri reali sia "grande", esso non contiene nessun elemento che soddisfi tale equazione. Per ovviare a questo problema, introduciamo un nuovo "numero", i, chiamato *unità immaginaria*, che gode della proprietà seguente

$$i^2 = -1. \tag{1.1}$$

È ovvio che tale numero non sia un numero reale e che, al contempo, risolva il nostro problema di estrarre radici quadrate di numeri negativi. Infatti, se $-a < 0$, con $a > 0$ e $a \in \mathbb{R}$, possiamo operare il seguente calcolo

$$\sqrt{-a} = \sqrt{-1 \cdot a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = \pm i\sqrt{a},$$

e quindi ne risulta il valore di una radice quadrata di un numero negativo come prodotto tra l'unità immaginaria i e la radice del (valore assoluto) del numero a.

Un numero della forma ai, con $a \in \mathbb{R}$, prende il nome di *numero immaginario*: a viene chiamato, in tal caso, *coefficiente dell'immaginario*. Possiamo indicare con $\mathcal{I}$ l'insieme di tutti i numeri immaginari: per la precisione

$$\mathcal{I} = \{ai : a \in \mathbb{R}\}.$$

Possiamo poi definire le seguenti operazioni che coinvolgono elementi di $\mathbb{R}$ e $\mathcal{I}$:

(1) *addizione, sottrazione*: se $ai, bi \in \mathcal{I}$, allora

$$ai \pm bi = (a \pm b)i \in \mathcal{I};$$

(2) *moltiplicazione tra un reale ed un immaginario*: se $ai \in \mathcal{I}$ e $b \in \mathbb{R}$, allora

$$b \cdot ai = (ba)i \in \mathcal{I};$$

(3) *prodotto tra due immaginari*: se $ai, bi \in \mathcal{I}$, allora
$$ai \cdot bi = (ab)i^2 = -ab \in \mathbb{R};$$
(4) *quoziente di due numeri immaginari*: se $ai, bi \in \mathcal{I}$, allora
$$\frac{ai}{bi} = \frac{a}{b} \in \mathbb{R};$$
(5) *potenza di un immaginario*: se $ai \in \mathcal{I}$ e $n \in \mathbb{N}$, allora
$$(ai)^n = a^n \cdot i^n.$$

Osserviamo che, a differenti valori del numero naturale n, corrispondono valori diversi ma che si ripetono con una certa sistematicità del numero i; infatti
$$i^0 = 1, \quad i^1 = i, \quad i^2 = -1, \quad i^3 = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \dots,$$
e quindi vediamo che le potenze intere di i assumono solo i quattro valori
$$1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$$

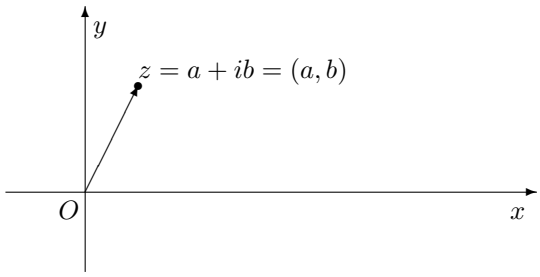
2. I numeri complessi

2.1. **Definizione dell'insieme $\mathbb{C}$.** Un'espressione della forma $z = a + ib$, con $a, b \in \mathbb{R}$ si dice *numero complesso*. L'insieme di tutti i numeri complessi si indica con $\mathbb{C}$: quindi per una scrittura simbolica si ha
$$\mathbb{C} = \{z = a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}. \tag{2.1}$$
I coefficienti a, b prendono il nome, rispettivamente, di *parte reale* e *coefficiente dell'immaginario* del numero complesso $z = a + ib$. Si usa anche scrivere
$$a = \mathrm{Re}(z), \qquad b = \mathrm{Im}(z). \tag{2.2}$$
Si noti che ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ è anche un numero complesso, in quanto possiamo pensare
$$a = a + i0 \in \mathbb{C}.$$
Ne segue che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Il numero complesso *nullo* è per definizione il numero $0 = 0+0i$ (che coincide con lo zero di $\mathbb{R}$). È chiaro che $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \neq \emptyset$: infatti l'elemento $i \in \mathbb{C}$ è tale che $i \notin \mathbb{R}$, poiché, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ si ha $\alpha^2 \geqslant 0$, mentre $i^2 = -1$. Se ne deduce anche che $\mathcal{I} \subset \mathbb{C}$, mentre $\mathcal{I} \nsubseteq \mathbb{R}$ e $\mathcal{I} \cap \mathbb{R} = \{0\}$.

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Il *modulo* di z è il numero reale non negativo
$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2}. \tag{2.3}$$
Ad esempio il modulo del numero complesso $z = 1 - i$ è
$$|z| = |1 - i| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}.$$
Osserviamo che si potrebbe creare confusione tra nozione di modulo di un numero complesso e valore assoluto di un numero reale. Tale confusione è in realtà inesistente, in quanto le due nozioni coincidono, Infatti, se $\alpha \in \mathbb{R}$, allora α si può rappresentare in modo unico come numero complesso prendendo $\mathrm{Re}(\alpha) = \alpha$ e $\mathrm{Im}(\alpha) = 0$, in quanto $\alpha = \alpha + i0 \in \mathbb{C}$. Ma allora
$$|\alpha| = \sqrt{(\mathrm{Re}(\alpha))^2 + (\mathrm{Im}(\alpha))^2} = \sqrt{\alpha^2} = |\alpha|,$$

dove il simbolo $|\cdot|$ a sinistra indica il modulo di α come numero complesso, mentre il simbolo $|\cdot|$ a destra indica il valore assoluto di α come numero reale.

Osserviamo che ogni numero complesso può essere identificato tramite una coppia di numeri reali (a, b) e il suo modulo. Ciò suggerisce che ogni numero complesso abbia una rappresentazione nel piano cartesiano relativo ad un sistema di riferimento di assi ortogonali xOy. La situazione è illustrata in figura



Il piano dotato di un sistema di rifermineto usato per rappresentare i numeri complessi si chiama *piano di Gauss*. L'origine O del sistema coincide con il numero complesso nullo, mentre ogni numero reale si rappresenta unicamente come un punto sull'asse Ox e ogni numero immaginario come un punto sull'asse Oy, in quanto

$$a = (a, 0), \qquad ia = (0, a),$$

rappresentano le loro coordinate.

Proposizione 2.1. *Il modulo del numero complesso $z \in \mathbb{C}$ coincide, nel piano di Gauss, con la lunghezza del segmento OP, dove P è il punto del piano di Gauss a cui corrisponde il numero complesso z.*

Dimostrazione. Consideriamo la figura precedente. Se $P(a, b)$, dove $z = a + ib$, allora

$$OP = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|,$$

come volevasi dimostrare. □

2.2. **Operazioni con i numeri complessi.** Possiamo pensare ad un numero complesso come un polinomio di primo grado nella variabile i. Possiamo allora definire le operazioni tra essi, utilizzando le regole note per le operazioni tra i polinomi.

2.2.1. *ADDIZIONE.* Dati i due numeri complessi $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, abbiamo

$$z \pm w = (a \pm c) + i(b \pm d). \tag{2.4}$$

Ad esempio, se $z = 1 + 2i$ e $w = 3 - i$, allora

$$z + w = 1 + 2i + 3 - i = 4 + i.$$

2.2.2. *PRODOTTO.* Dati i due numeri complessi $z = a + ib, w = c + id \in \mathbb{C}$, ossiamo eseguire il seguente calcolo

$$z \cdot w = (a + ib)(c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = (ac - bd) + i(ad + bc).$$

Definiamo quindi la moltiplicazione come

$$z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc). \tag{2.5}$$

Nel caso particolare in cui $c + id = \lambda \in \mathbb{R}$, e quindi $c = \lambda, d = 0$, abbiamo la moltiplicazione tra un numero complesso e un numero reale definita da

$$\lambda \cdot (a + ib) = \lambda a + i(\lambda b). \tag{2.6}$$

Ad esempio per $z = 1 + 2i, w = 3 - i$ si ha

$$z \cdot w = (1 + 2i)(3 - i) = 3 - i + 6i - 2i^2 = 5 + 5i.$$

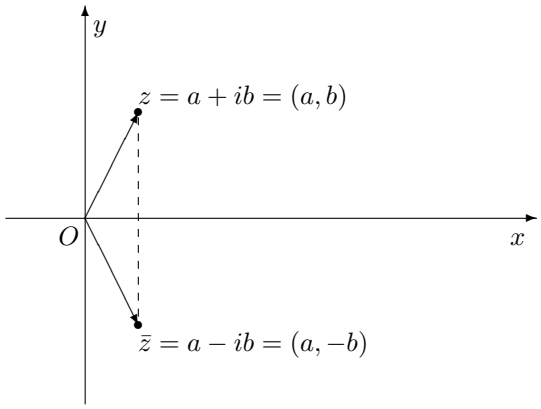
2.2.3. *CONIUGATO.* Se $z = a + ib \in \mathbb{C}$ è un numero complesso, si definisce il suo *coniugato* come il numero complesso

$$\bar{z} = a - ib \in \mathbb{C}. \tag{2.7}$$

Si osservi che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathrm{Re}(\bar{z}) = \mathrm{Re}(z), \qquad \mathrm{Im}(\bar{z}) = -\mathrm{Im}(z). \tag{2.8}$$

Inoltre, geometricamente il coniugio implica considerare il numero complesso rappresentato nel piano di Gauss come il simmetrico, rispetto all'asse Ox, del numero complesso originale, come si può vedere in figura.



Valgono poi le seguenti relazioni.

Proposizione 2.2. *Sia $z = a + ib \in \mathbb{C}$. Allora*
(1) $|z| \geqslant 0$ *e* $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$*;*
(2) $|\lambda z| = |\lambda| \cdot |z|$*, per ogni* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*
(3) $|z| = |\bar{z}|$*;*
(4) $z\bar{z} = |z|^2$*;*
(5) $z = \bar{z} \Longleftrightarrow z = a \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. (1) $|z|$ risulta sempre maggiore o guale a zero in quanto radice quadrata di un numero positivo, inoltre $|z| = 0$ se e solo se $a^2 + b^2 = 0$ e tale condizione è verificata se e solo se $a = b = 0$ e quindi se e solo se $z = 0$.

(2) Abbiamo

$$|\lambda z| = |\lambda a + i(\lambda b)| = \sqrt{(\lambda a)^2 + (\lambda b)^2} = \sqrt{\lambda^2(a^2 + b^2)} = |\lambda| \cdot |z|.$$

(3) Abbiamo

$$|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|.$$

(4) Abbiamo

$$z\bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - iab + iab - i^2b^2 = a^2 + b^2 = |z|^2.$$

(5) Abbiamo

$$z = \bar{z} \Longleftrightarrow a + ib = a - ib \Longleftrightarrow 2ib = 0 \Longleftrightarrow b = 0 \Longleftrightarrow z = a \in \mathbb{R}.$$

□

2.2.4. *RECIPROCO.* Dato un numero complesso $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, il numero complesso

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \in \mathbb{C}, \tag{2.9}$$

si dice *reciproco* di z. Ad esempio, per $z = 1 + i$,

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

Vale il seguente

Teorema 2.3. *Il reciproco di un numero complesso non nullo $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ è l'unico numero complesso che moltiplicato con z dà 1.*

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{1}{z} \cdot z = \frac{\bar{z}}{|z|^2} \cdot z = \frac{|z|^2}{|z|^2} = 1.$$

Viceversa, supponiamo che $w \in \mathbb{C}$ sia tale che $zw = 1$. Allora, moltiplicando ambo i membri per $\bar{z}$ si ha $|z|^2 w = \bar{z}$ e quindi, moltiplicando nuovamente ambo i memebri per $1/|z|^2$ (si osservi che $|z| \neq 0$ poiché $z \neq 0$) si ottiene $w = \bar{z}/|z|^2 = 1/z$, e quindi w è il reciproco di z. □

Nel caso in cui $z = \alpha \in \mathbb{R}$ abbiamo, essendo $\bar{\alpha} = \alpha$

$$\frac{\bar{\alpha}}{|\alpha|^2} = \frac{\alpha}{\alpha^2} = \frac{1}{\alpha},$$

e quindi la nozione di reciproco di un numero complesso coincide con quella di reciproco di un numero reale.

2.2.5. *QUOZIENTE.* Se $z, w \in \mathbb{C}$, $w \neq 0$, si definisce il loro quoziente come

$$z/w = z \cdot \frac{1}{w} = \frac{z\bar{w}}{|w|^2}. \tag{2.10}$$

Ad esempio, se $z = 1 + 3i$ e $w = 1 + i$ allora

$$\frac{z}{w} = \frac{1+3i}{1+i} = \frac{(1+3i)(1-i)}{1+1} = \frac{1-i+3i-3i^2}{2} = \frac{4+2i}{2} = 2 + i.$$

2.3. **L'argomento di un numero complesso.** Abbiamo visto che un numero complesso $z = a + ib \in \mathbb{C}$ si può rappresentare nel piano di Gauss con un punto $P(a, b)$. Si definisce *argomento* di z la misura dell'angolo formato dal segmento OP e dall'asse Ox misurato in senso trigonometrico. Esso viene indicato con $\arg(z)$ e si ha $0 \leqslant \arg(z) < 2\pi$. Quindi $\arg : \mathbb{C} \to [0, 2\pi)$ è una funzione suriettiva ma non iniettiva. Inoltre, per ogni $\alpha > 0$

$$\arg(\alpha) = 0, \quad \arg(-\alpha) = -\pi, \quad \arg(i\alpha) = \frac{\pi}{2}, \quad \arg(-i\alpha) = \frac{3\pi}{2}.$$

Vogliamo determinare un metodo per il calcolo dell'argomento. A tal fine si ricordi che i *quadranti* del piano di Gauss sono i seguenti sottoinsiemi:

$$I = \{a + ib \in \mathbb{C} : a > 0, b > 0\},$$

$$II = \{a + ib \in \mathbb{C} : a < 0, b > 0\},$$

$$III = \{a + ib \in \mathbb{C} : a < 0, b < 0\},$$

$$IV = \{a + ib \in \mathbb{C} : a > 0, b < 0\}.$$

Si osservi che

$$\mathbb{C} = I \cup II \cup III \cup IV \cup Ox \cup Oy,$$

dove gli assi cartesiani sono pensati come gli insiemi

$$Ox = \{a + ib \in \mathbb{C} : a \in \mathbb{R}, b = 0\},$$

$$Oy = \{a + ib \in \mathbb{C} : a = 0, b \in \mathbb{R}\}.$$

Sia $z = a + ib \in \mathbb{C} \setminus (Ox \cup Oy)$ un numero complesso che non giace sugli assi coordinati (quindi $a \neq 0, b \neq 0$). Sia P il punto che corrisponde a z nel piano di Gauss e A la sua proiezione sull'asse Ox. Poniamo poi $\varphi = A\widehat{O}P \in (0, \pi/2)$. Analizziamo separatamente i casi a seconda del quadrante in cui si trova il punto P. Se z si trova nel I quadrante abbiamo

$$\tan\varphi = \frac{PA}{AO} = \frac{b}{a} \Longrightarrow \varphi = \arctan\frac{b}{a}.$$

Quindi

$$z = a + ib \in I \Longrightarrow \arg(z) = \arctan\frac{b}{a}.$$

Analogamante si trova

$$z = a + ib \in II \Longrightarrow \arg(z) = \pi - \arctan\frac{b}{|a|}.$$

$$z = a + ib \in III \Longrightarrow \arg(z) = \pi + \arctan\frac{|b|}{|a|}.$$

$$z = a + ib \in IV \Longrightarrow \arg(z) = 2\pi - \arctan\frac{|b|}{a}.$$

2.4. **Forma trigonometrica di un numero complesso.** Abbiamo visto nel precendente che ad ogni numero complesso corrisponde un preciso valore, unico per ogni numero complesso fissato, detto argomento. Inoltre, sappiamo che ogni numero complesso è associato ad un numero reale, il suo modulo. Queste due grandezze permettono di dare una ulteriore rappresentazione di un numero complesso. Precisamente vale il seguente

Teorema 2.4. *Sia $z \in \mathbb{C}$ un numero complesso. Allora*

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \tag{2.11}$$

dove $\rho = |z|$ è il modulo di z e $\varphi = \arg(z)$ il suo argomento.

L'espressione (2.11) prende il nome di *forma trigonometrica* del numero complesso z. Possiamo ribattezzare l'espressione $z = a+ib$ come *forma algebrica* del numero complesso z. Si osservi che l'unicità del numero z implica le seguenti relazioni che legano parte reale e coefficiente dell'immaginario con modulo ed argomento di z:

$$\mathrm{Re}(z) = a = \rho\cos\varphi = |z|\cos(\arg(z)), \tag{2.12}$$

$$\mathrm{Im}(z) = b = \rho\sin\varphi = |z|\sin(\arg(z)), \tag{2.13}$$

che vengono comunemente chiamate *coordinate polari* del punto di coordinate cartesiane (a, b).

La scrittura dei numeri complessi in forma trigonometrica permette di semplificare notevolmente i calcoli quando si effettuano operazioni di prodotto e quoziente o di elevamento a potenza. In particolare vale il seguente fatto.

Teorema 2.5. *Siano $z, w \in \mathbb{C}$ due numeri complessi espressi in forma trigonometrica:*

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad \rho = |z|, \quad \varphi = \arg(z);$$
$$w = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad r = |w|, \quad \theta = \arg(w).$$

Allora

$$zw = \rho r[\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)], \tag{2.14}$$

$$z/w = \frac{\rho}{r}[\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)], \tag{2.15}$$

$$z^n = \rho^n[\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)], \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.16}$$

Dimostrazione. Abbiamo

$$\begin{aligned} zw =& \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot r(\cos\theta + i\sin\theta) \\ =& \rho r[(\cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta) + i(\cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta)] \\ =& \rho r[\cos(\varphi+\theta) + i\sin(\varphi+\theta)], \end{aligned}$$

avendo usato le formule trigonometriche

$$\cos(\varphi+\theta) = \cos\varphi\cos\theta - \sin\varphi\sin\theta,$$

$$\sin(\varphi+\theta) = \cos\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\theta.$$

Osserviamo che

$$\frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)}{r(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} = \frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta),$$

e quindi

$$\begin{aligned} z/w =& \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)\cdot\frac{1}{r}(\cos\theta - i\sin\theta) \\ =& \frac{\rho}{r}[(\cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta) + i(\sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta)] \\ =& \frac{\rho}{r}[\cos(\varphi-\theta) + i\sin(\varphi-\theta)], \end{aligned}$$

avendo usato le formule trigonometriche

$$\begin{aligned} \cos(\varphi-\theta) &= \cos\varphi\cos\theta + \sin\varphi\sin\theta, \\ \sin(\varphi+\theta) &= \sin\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\theta. \end{aligned}$$

Infine, per l'ultima formula, osserviamo che

$$\begin{aligned} z^2 &= z\cdot z = \rho^2[\cos(2\varphi) + i\sin(2\varphi)], \\ z^3 &= z^2\cdot z = \rho^3[\cos(3\varphi) + i\sin(3\varphi)], \end{aligned}$$

e quindi

$$z^n = z^{n-1}\cdot z = \rho^{n-1}[\cos((n-1)\varphi) + i\sin((n-1)\varphi)]\cdot\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

da cui la relazione cercata. □

Nel caso particolare in cui $\rho = |z| = 1$ abbiamo dalla formula delle potenze la seguente relazione

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi), \qquad \varphi\in\mathbb{R}, \quad n\in\mathbb{Z}, \tag{2.17}$$

detta *formula di de Moivre*.

Un'ultima relazione, che non dimostriamo, è la seguente, dovuta a Gauss e che permette di esprimere un numero complesso in quella che si definisce *forma esponenziale* del numero complesso. Vale il seguente risultato, detto *relazione di Gauss*.

Teorema 2.6.

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \qquad \theta\in\mathbb{R}.$$

Si osservi che in questa sede assumiamo solo un significato formale dell'esponenziale con esponente immaginario: la sua definizione corretta esula dai compiti di queste lezioni. L'espressione precedente permette di scrivere il numero complesso $z\in\mathbb{C}$ il cui modulo sia pari a ρ e di argomento θ nella forma

$$z = \rho e^{i\theta}. \tag{2.18}$$

Per concludere, facciamo vedere una conseguenza immediata della relazione di Gauss. In matematica, i numeri più importanti sono i seguenti:

$$0, \quad 1, \quad \pi, \quad e, \quad i.$$

Abbiamo visto che ognuno di questi numeri nasce in corrispondenza di teorie matematiche e scientifiche diverse, che sembrano non avere nessun tipo di correlazione tra loro. Tuttavia, possiamo utilizzare la relazione di Gauss con $\theta = \pi$ e ottenere

$$e^{i\pi} = \cos\theta + i\sin\theta = -1,$$

e quindi la notevole relazione tra i cinque numeri fondamentali della matematica

$$e^{i\pi} + 1 = 0. \tag{2.19}$$

3. Radici n-sime di un numero complesso

Abbiamo visto come, dall'espressione in forma trigonometrica di un numero complesso, sia possibile scrivere in maniera semplice la sua potenza n-sima. Ci chiediamo ora come esprimere le sue radici n-sime. Sia allora $z \in \mathbb{C}$ e sia $n \in \mathbb{N}$. Poniamo poi $w = z^n$: z è allora una radice n-sima di w. Se

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad w = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

segue che

$$\rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = r[\cos(\varphi + 2k\pi) + i\sin(\varphi + 2k\pi)].$$

L'ultima identità ha senso poiché, se $0 \leqslant \theta < 2\pi$, allora $0 \leqslant n\theta < 2n\pi$. Abbiamo allora

$$\rho^n = r, \qquad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

e quindi

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \qquad \theta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}.$$

Si osservi che per $k = 0, \dots, n-1$ si ottengono n valori differenti di θ, mentre per $k \geqslant n$ tali valori iniziano a ripetersi, a causa della periodicità. Ne segue che le radici n-sime di un numero complesso sono esattamente n e si ottengono al modo seguente: se

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta),$$

allora

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.1}$$

Un caso particolarmente interessante si ha per $z = 1$. Poiché $1 = \cos 0 + i\sin 0$ dalla formula per le radici ennesime di un numero complesso qualsiasi otteniamo l'espressione per le *radici n-sime dell'unità*

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1. \tag{3.2}$$

Possiamo indicare ogni radice n-sima dell'unità al modo seguente

$$\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Tali radici hanno importanti proprietà: la prima di queste è che esse costituiscono i vertici del poligono regolare di n lati inscritto nella circonferenza di raggio 1. Ciò si comprende facilmente osservando che tali radici si ottengono dividendo l'angolo di 2π radianti in n parti uguali e, per ciascuna di esse, si considera l'angolo di ampiezza $2k\pi/n$ radianti. Inoltre, come è facile verificare usando la formula fondamentale della trigonometria, $|\omega_k| = 1$ per ogni $k = 0, \dots, n-1$.

Un'altra importante proprietà è la seguente: se indichiamo con $\omega = \omega_1$, allora abbiamo la relazione

$$\omega_k = \omega^k, \qquad k = 0, \dots, n-1. \tag{3.3}$$

A tale risultato si perviene utilizzando la formula di de Moivre: infatti

$$\omega^k = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n} = \omega_k.$$

Concludiamo con una osservazione. Abbiamo visto che le radici n-sime di un numero complesso, e anche dell'unità, sono esattamente n: ciò equivale a dire che,

nell'insieme dei numeri complessi, l'equazione $x^n = 1$ ha esattamente n soluzioni (o radici). Questo fatto in realtà vale in modo molto più generale ed è enunciato in quello che viene detto *Teorema fondamentale dell'algebra*

Teorema 3.1 (Fondamentale dell'algebra)**.** *Una equazione algebrica di grado n a coefficienti complessi ha esattamente n soluzioni nell'insieme dei numeri complessi.*

Non diamo una dimostrazione esaustiva di tale fatto (troppo complessa per le conoscenze degli studenti fino a questo punto), tuttavia possiamo fare alcune osservazioni che, in qualche modo, confermano l'asserto del teorema.

(1) *Se $\alpha + i\beta$ è una radice dell'equazione $ax^2 + bx + c = 0$, allora anche $\alpha - i\beta$ è una soluzione.*
Basta considerare i differenti casi per il segno del discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\Delta > 0 \Longrightarrow x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$
$$\Delta = 0 \Longrightarrow x_{1/2} = -\frac{b}{2a},$$
$$\Delta < 0 \Longrightarrow x_{1/2} = -\frac{b}{2a} \pm i\frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}.$$

La terza condizione implica che le soluzioni complesse di una equazione del secondo ordine sono coniugate, quindi la conclusione cercata.

(2) *Ogni equazione di grado dispari ammette almeno una radice reale.*
Se infatti ci fossero solo soluzioni complesse coniugate, esse sarebbero in numero pari. Poiché un polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$ si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \bar{\alpha}),$$

con $\alpha \in \mathbb{C}$ radice complessa, ne segue che il prodotto risultante avrebbe grado pari e non dispari. Ne segue che deve esserci almeno una radice reale.

Le due osservazioni, unite al fatto che ogni polinomio di secondo grado ax^2+bx+c si decompone come

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

dove x_i, $i = 1, 2$ sono le radici, permette di affermare (ma siamo ben lontani da una dimostrazione rigorosa) che le soluzioni di una equazione di grado n sono, nell'insieme $\mathbb{C}$, esattamente n.